人口統計(Demography)

授課教師：余清祥教授

日期：2025年4月23日

第六講：穩定人口理論

http://csyue.nccu.edu.tw

- Stationary(定常；均衡)：每年的出生與死亡狀況不變（人口總數固定，或是各年齡人口數固定）。
- Stable(穩定)：出生穩定變化、死亡率不變 (人口總數穩定變化，但未必總數維持固定)。
- 本講義將探討穩定人口，但僅以女性人口為研究對象，男性可藉由性比例(Sex ratio)以相同的方法推得；死亡率、生育率將以連續函數的方式計算。

穩定人口理論的假設

- 令 $B(t)$ 為第 t 時間的出生率(Birth rate)，

$$B=\int_0^1 B(t)dt \longrightarrow \text{一年的出生人數}$$

通常也可記為 $B(t+n)=B(t)\cdot e^{n r_i}$ 。

註：若$r_i>0$ 表示出生率隨時間遞增，$r_i<0$則出生率隨時間遞減，$r_i=0$ 則為均衡假設；r_i也稱為人口的成長力*(Force of growth)*。

■ 範例一：若 $B(t+n)=B(t)\cdot e^{nr_i}$ 且死亡率不隨時間改變，證明

$$P(t+n)=P(t)\cdot e^{nr_i}\text{。}$$

→令 $F_x(t)$ 為在時間 t 時 x 歲的人數，

$$F_x(t)\,dx=B(t-x)\cdot S(x)\,dx.$$

代入可求得

$$P(t)=\int_0^\infty F_x(t)\,dx=\int_0^\infty B(t-x)\cdot S(x)\,dx$$

$$=\int_0^\infty B(t)\cdot e^{-r_i x}\cdot S(x)\,dx$$

同理，也可求得

$$P(t+n) = \int_0^\infty F_x(t+n)\,dx$$

$$= \int_0^\infty B(t+n) \cdot e^{-r_i x} \cdot S(x)\,dx = e^{n r_i} P(t).$$

- 範例二：試求穩定人口下，t 時間年齡在 x 至 $x+dx$ 歲的人口比例。

→根據定義，這個年齡層的人口比例

$$\frac{F_x(t)\,dx}{P(t)} = \frac{B(t)\cdot e^{-r_i x}\cdot S(x)dx}{\int_0^\infty B(t)\cdot e^{-r_i x}\cdot S(x)dx} = \frac{e^{-r_i x}\cdot S(x)dx}{\int_0^\infty e^{-r_i x}\cdot S(x)dx}$$

與時間沒有關係。

註：這個特性與均衡假設相同，但在穩定假設下，$F_x(t)$ 是時間的函數。

由以上兩個範例可知穩定人口的條件（或定義）為：

- 任一年齡層的人口比例不隨時間改變；
- 總人口數隨時間以指數方式成長(或遞減)；
- 各年齡層的死亡率維持不變；
- 各年齡層的婦女生育率維持不變。

註：雖然婦女生育率維持不變，但因各年齡層的人口穩定地變化，出生數也會呈現指數般地變化。

- Sharpe and Lotka (1911)的穩定人口理論：

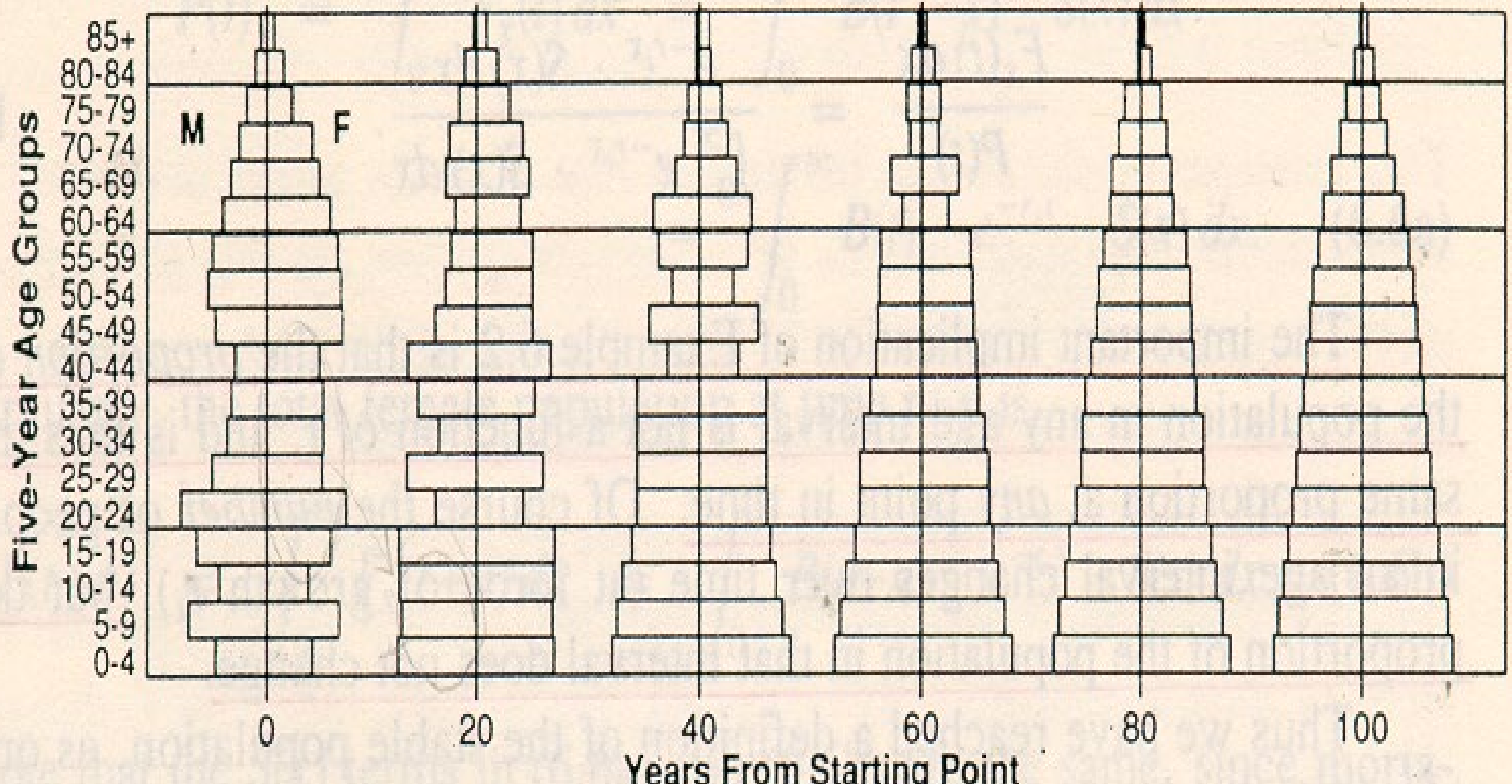
→ 無論原先給定的各年齡人口數為何，只要一個封閉族群的各年齡層死亡率及婦女生育率保持定值，未來這個族群的人口結構將趨近於穩定，總人口數也會呈現指數變化。

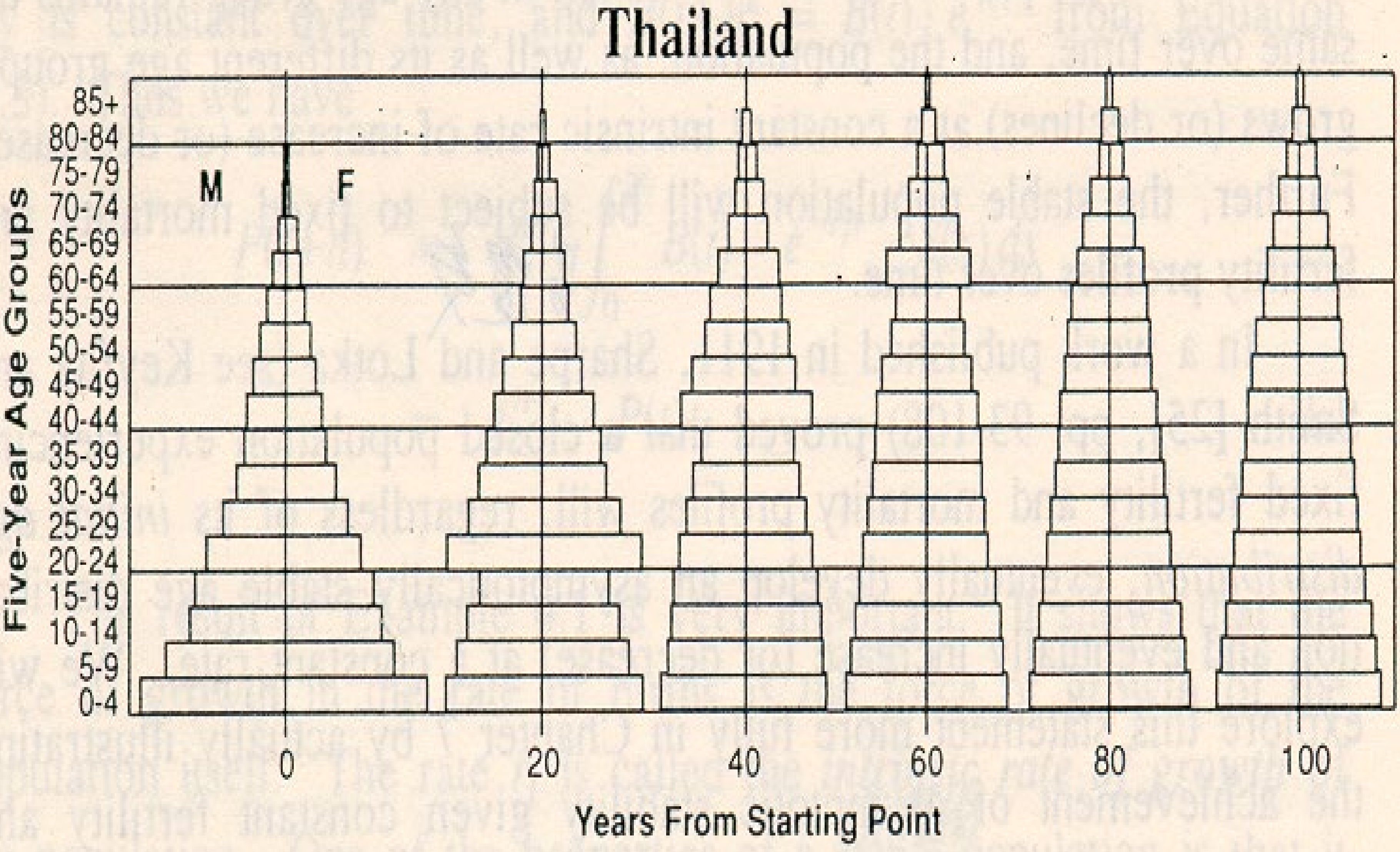
註：這個理論可由以下人口金字塔(Population Pyramid)看出，即使原先的結構與預期不同，經過幾十年後，人口結構會收斂至理論預期。

→問題：如何繪製人口金字塔？

註：國發會網站 https://pop-proj.ndc.gov.tw/

East Germany




Thailand
Five-Year Age Groups
85+
80-84
75-79
70-74
65-69
60-64
55-59
50-54
45-49
40-44
35-39
30-34
25-29
20-24
15-19
10-14
5-9
0-4
M
F
0
20
40
60
80
100
Years From Starting Point

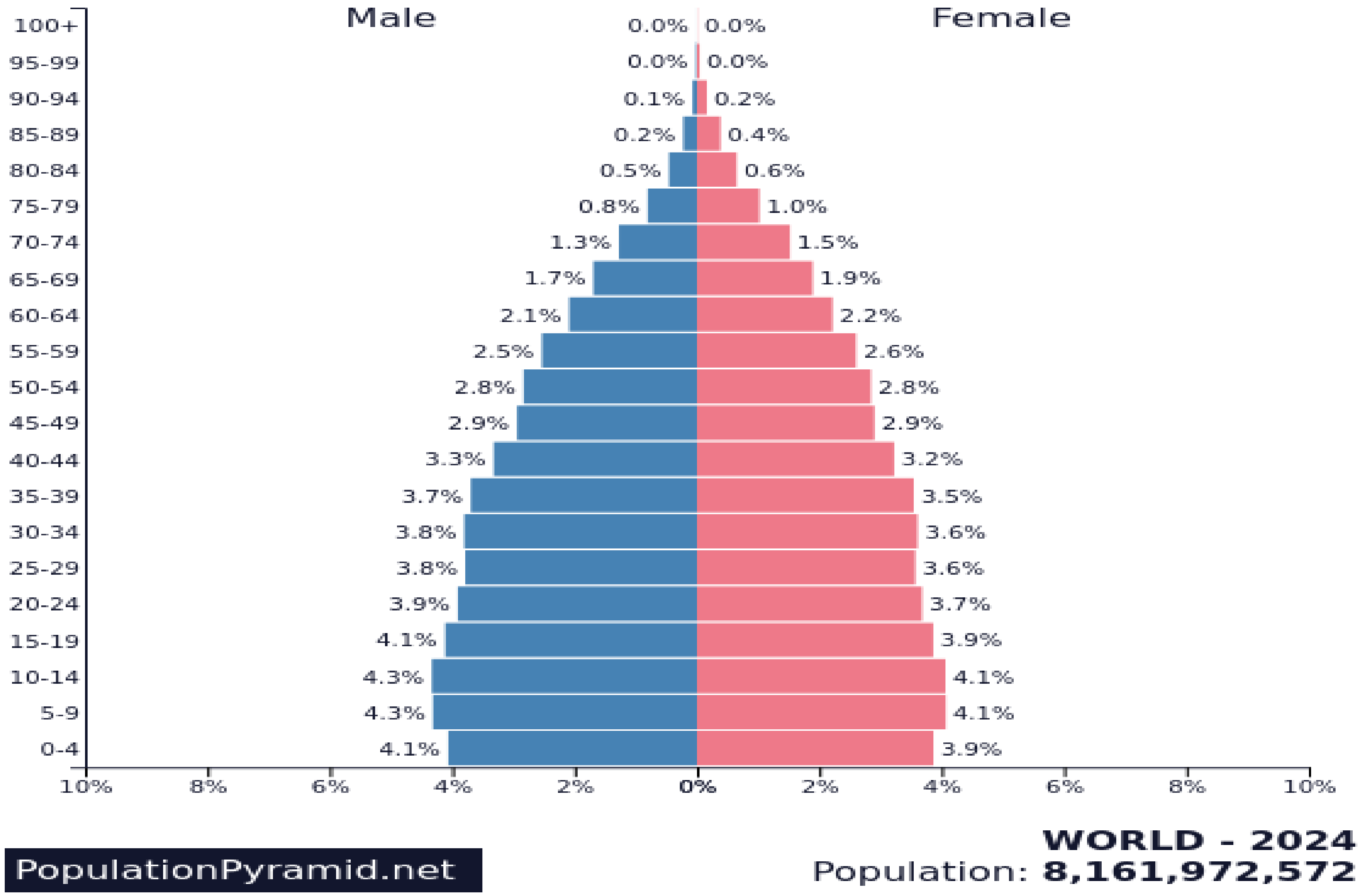
何謂人口金字塔？

- 人口金字塔是人口學用來研究人口隨時間變化的工具，由水平的條型圖組成，水平軸表示男女性別的比例，垂直軸則表示各年齡組別（通常以5歲為一組，也有以1歲為單位）的人口。

→可表現出人口在過去80年（或以上）發生的重要人口事件，以及由其帶來的衝擊與改變，例如：人口的遷入、遷出及戰爭、飢饉等。

2024年全世界人口金字塔

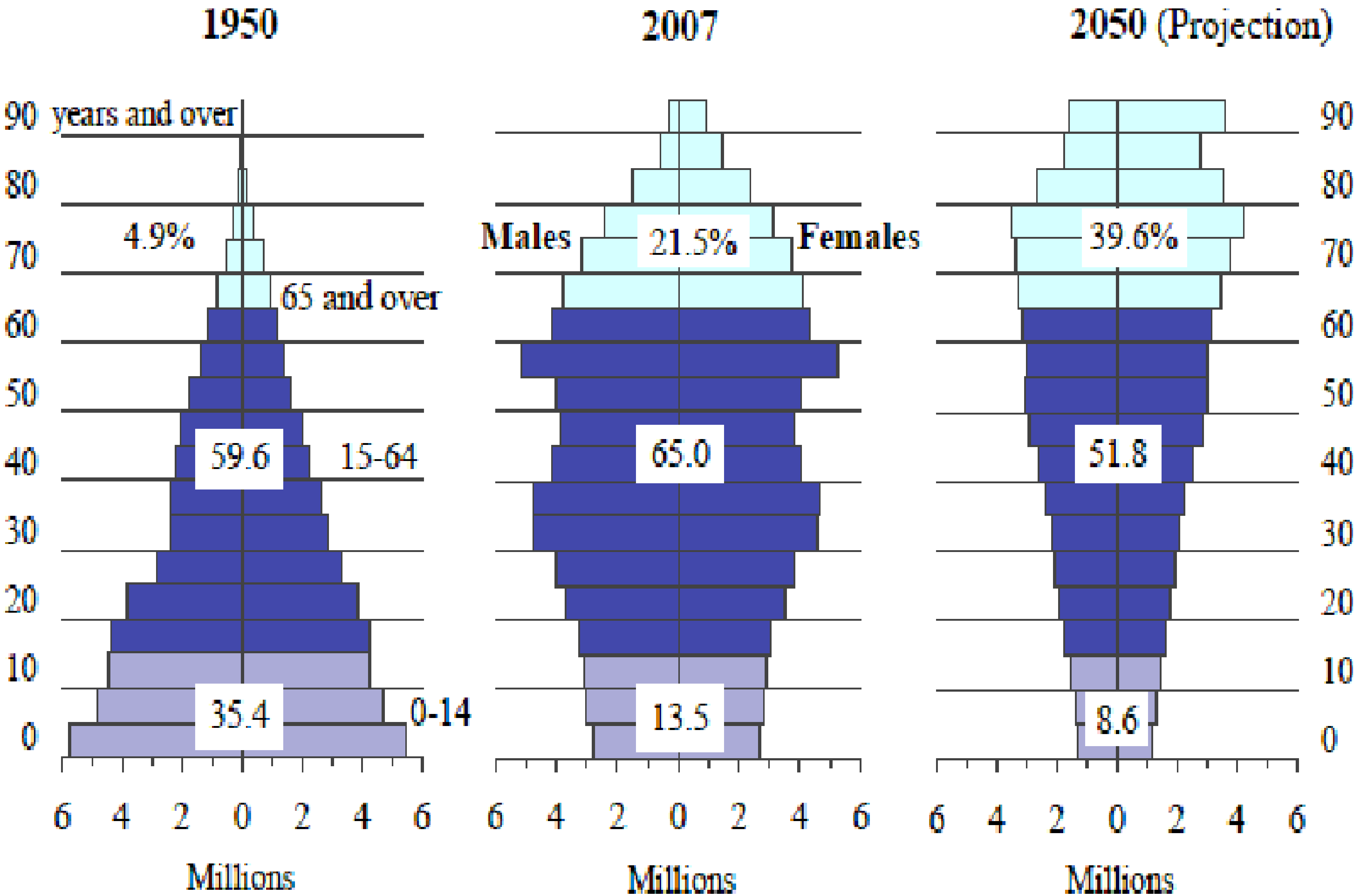
https://www.populationpyramid.net/world/2024/



2025年臺灣人口金字塔

https://population-pyramid.net/zh-tw/pp/%E5%8F%B0%E7%81%A3

日本的人口金字塔



https://www.researchgate.net/profile/Shigeyuki-Abe-2/publication/227471622/figure/fig1/AS:302365736488963@1449101017474/Population-pyramid-of-Japan-1950-2007-and-2050_W640.jpg

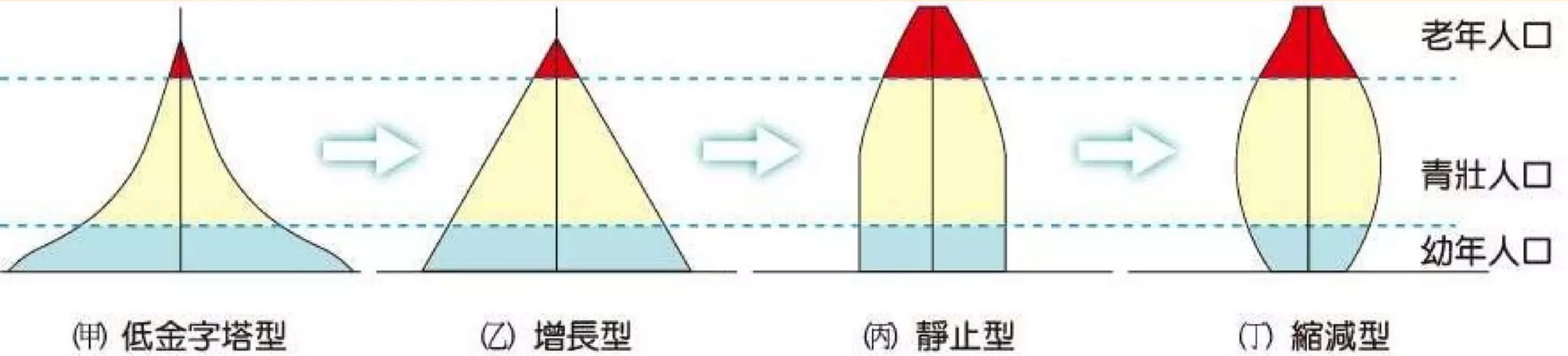
人口金字塔的形狀及類別

(1)增長型（年輕型）：如肯亞，金字塔的上窄底寬，顯示人口快速成長，其中死亡率快速衰減、生育率不變。

(2) 靜止型（成年型）：如美國，各年齡比例較相似，通常死亡率低、生育率接近替代水準。生活水準高、壽命長、低成長率的已開發國家大多屬於此類型。

(3)縮減型（老年型）：如德國，負的人口成長。通常死亡率長期超過出生率，使金字塔底部狹窄，而中老年齡層的圖形則相似而不變。

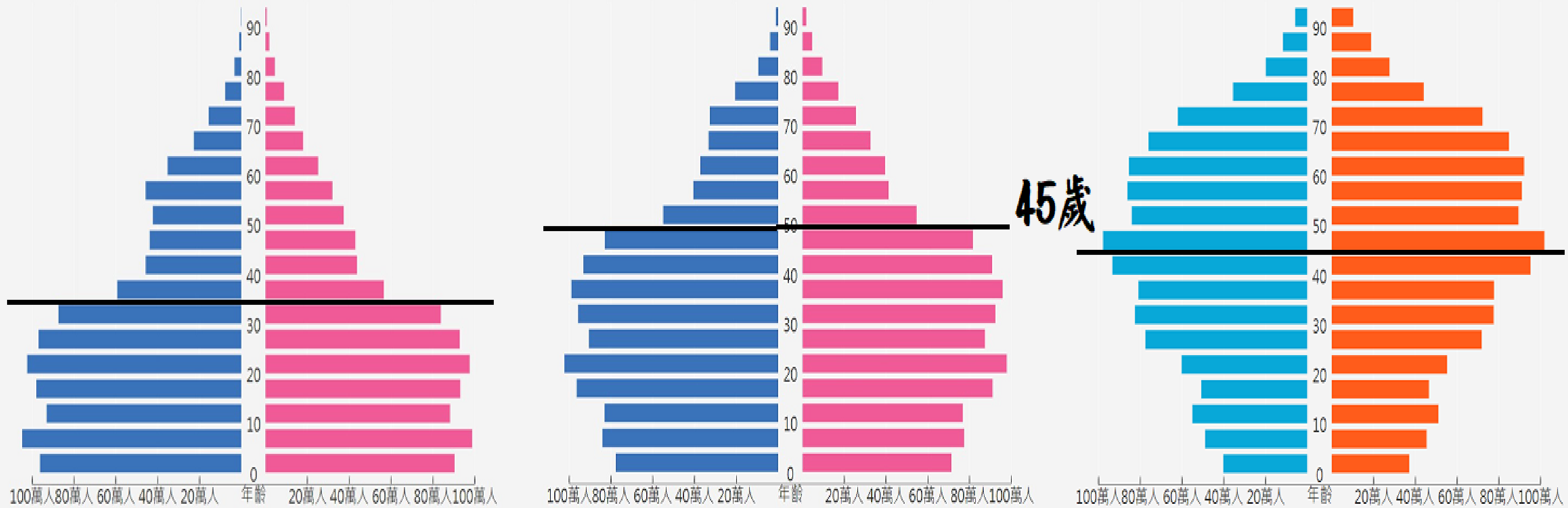
人口金字塔圖的轉型



出生率	高	高	低	低
死亡率	高	顯著降低	低	低
實例	衣索比亞	巴西、印度	美、澳洲	北歐、日本

https://pt.slideshare.net/guest49b527d/b2ch1

1985年　　2000年　　2025年



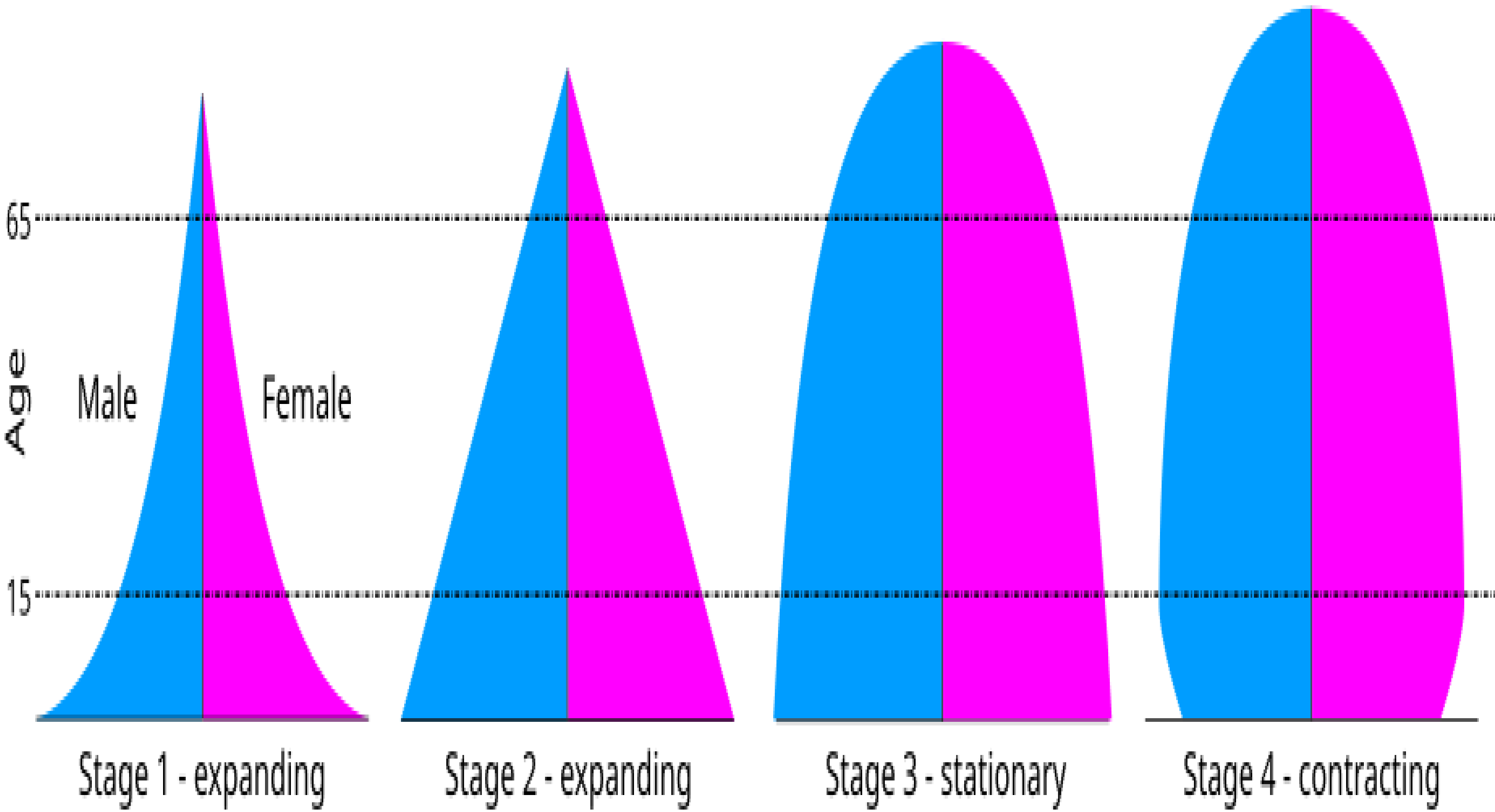
金字塔型　　塔吉鍋型　　高燈籠型

從金字塔變成燈籠，台灣社會制度必須大變革！台灣在1985年的人口結構 是很典型的人口金字塔；到了 2000年 台灣人口變成 塔吉鍋 但是 青壯人人口還是最多；但是 過了2020~2025之間 已經變成 上寬下窄的燈籠了！可以發現五齡人口最高峰，已經通過45歲，也就是代表 45歲以上人口 已經超過 45歲以下人口！台灣社會還沒有準備好面對這個從金字塔變成燈籠的人口結構的急遽變化！台灣不只需要關注 超高齡化的問題，更需要關注 社會長青化的問題！

製表:李東昇

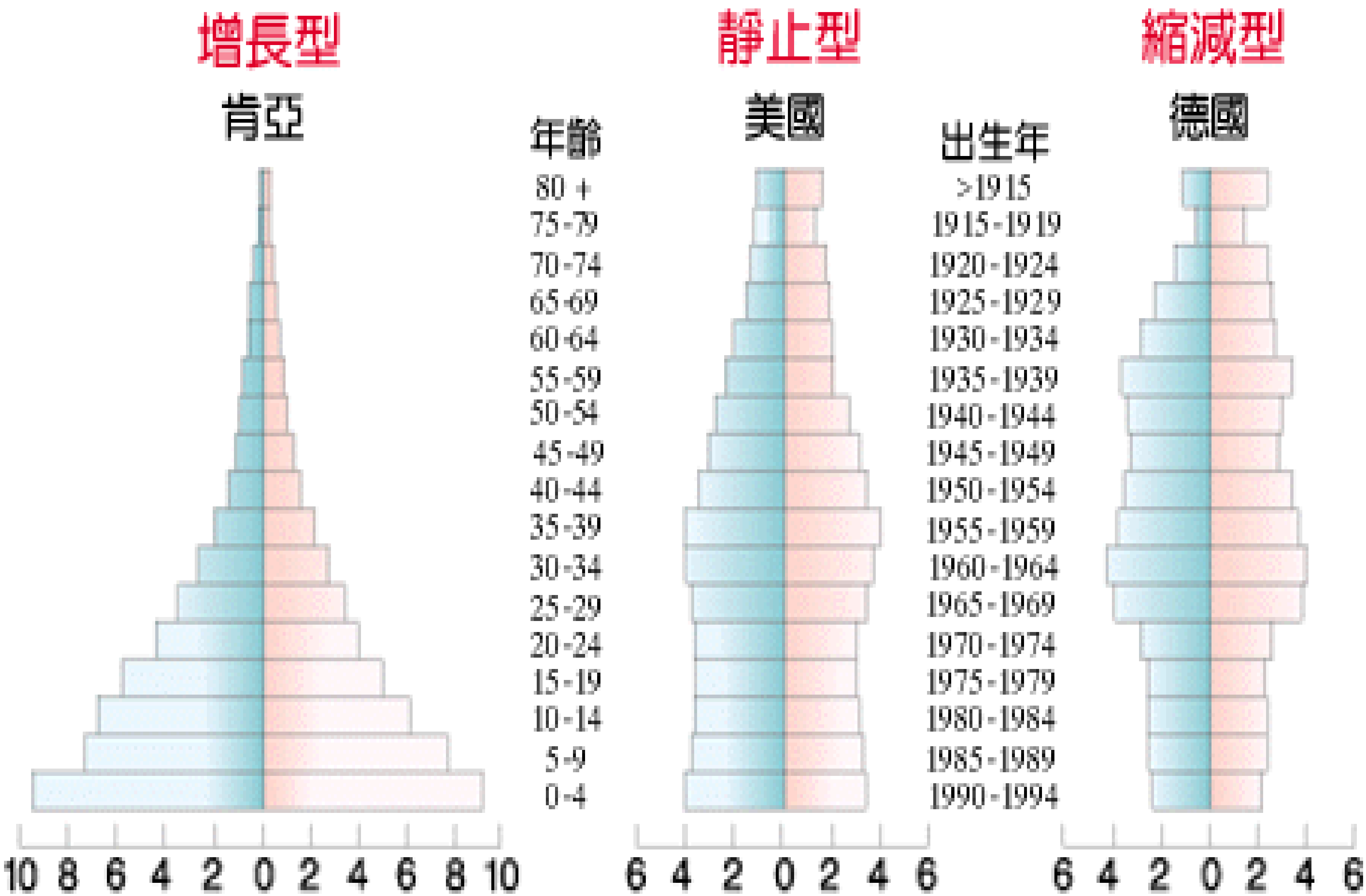
https://alexandroslee.club/wp-content/uploads/2016/04/1985%E4%BA%BA%E5%8F%A3%E7%B5%90%E6%A7%8B.png

人口金字塔的形狀



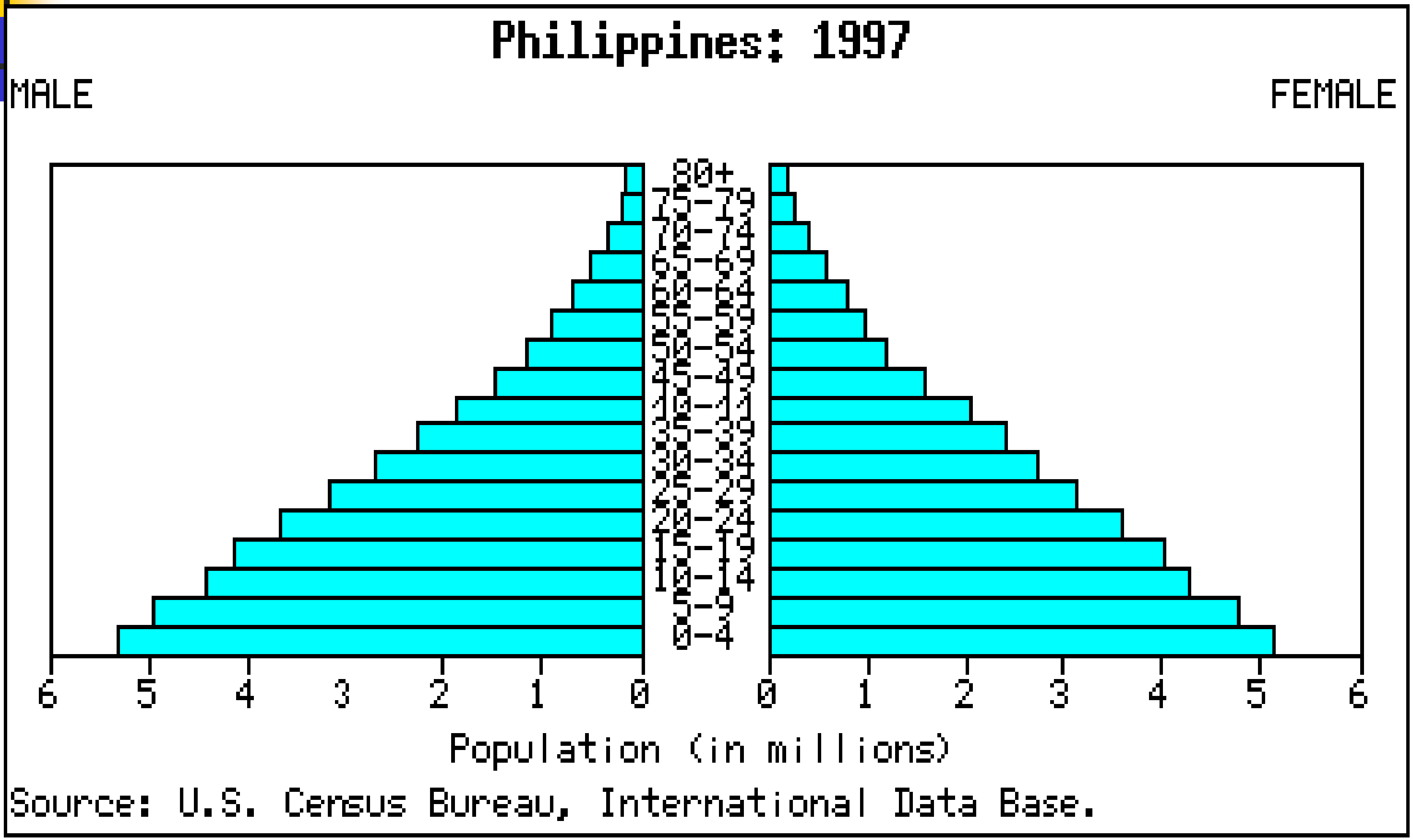
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E4%BA%BA%E5%8F%A3%E9%87%91%E5%AD%97%E5%A1%94

- 人口過渡模式四階段：一、低金字塔型；二、增長；三、靜止；四、縮減

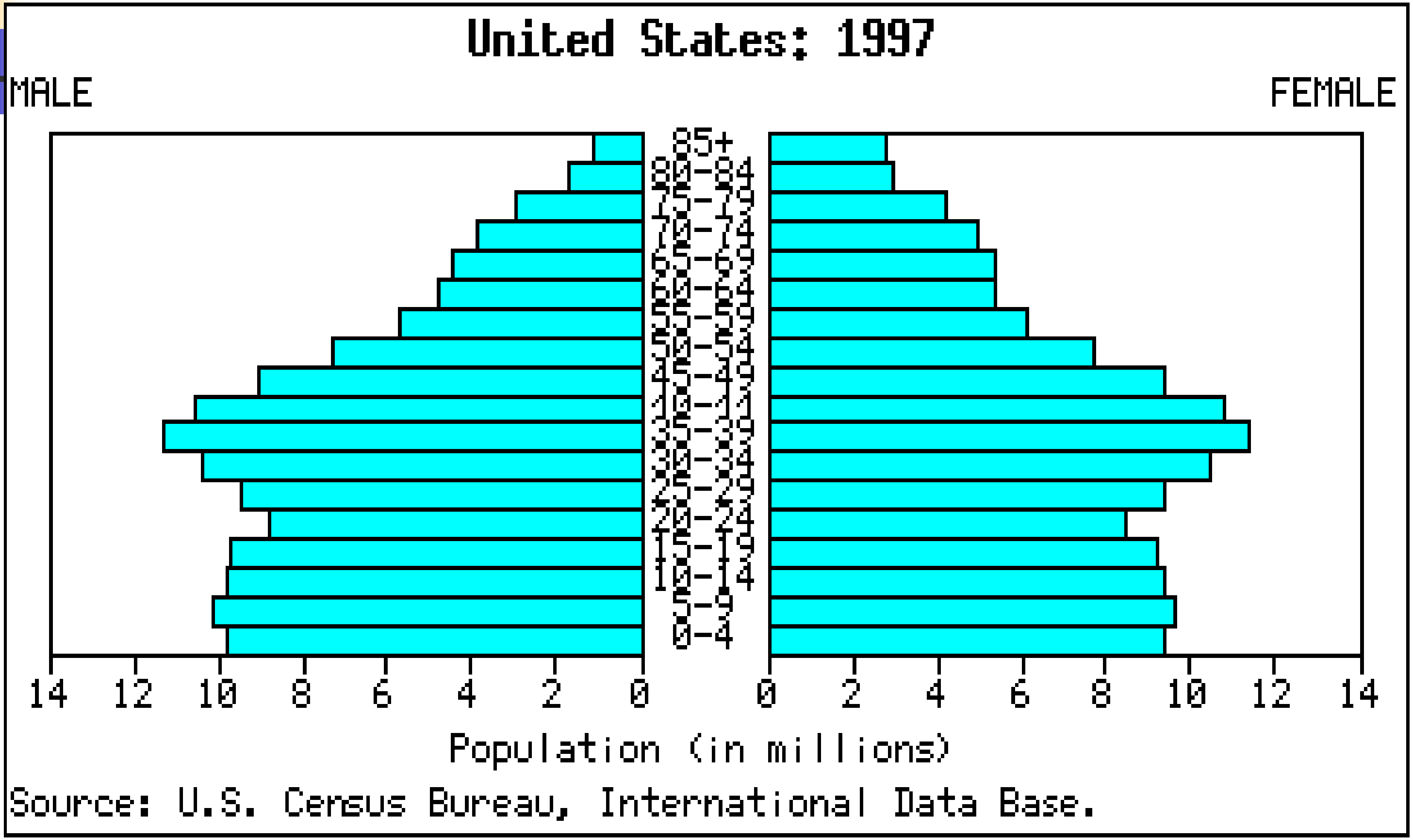


（來源：施添福主編（1999），高中地理教師手冊，龍騰文化出版社，頁231）

Rapid Growth

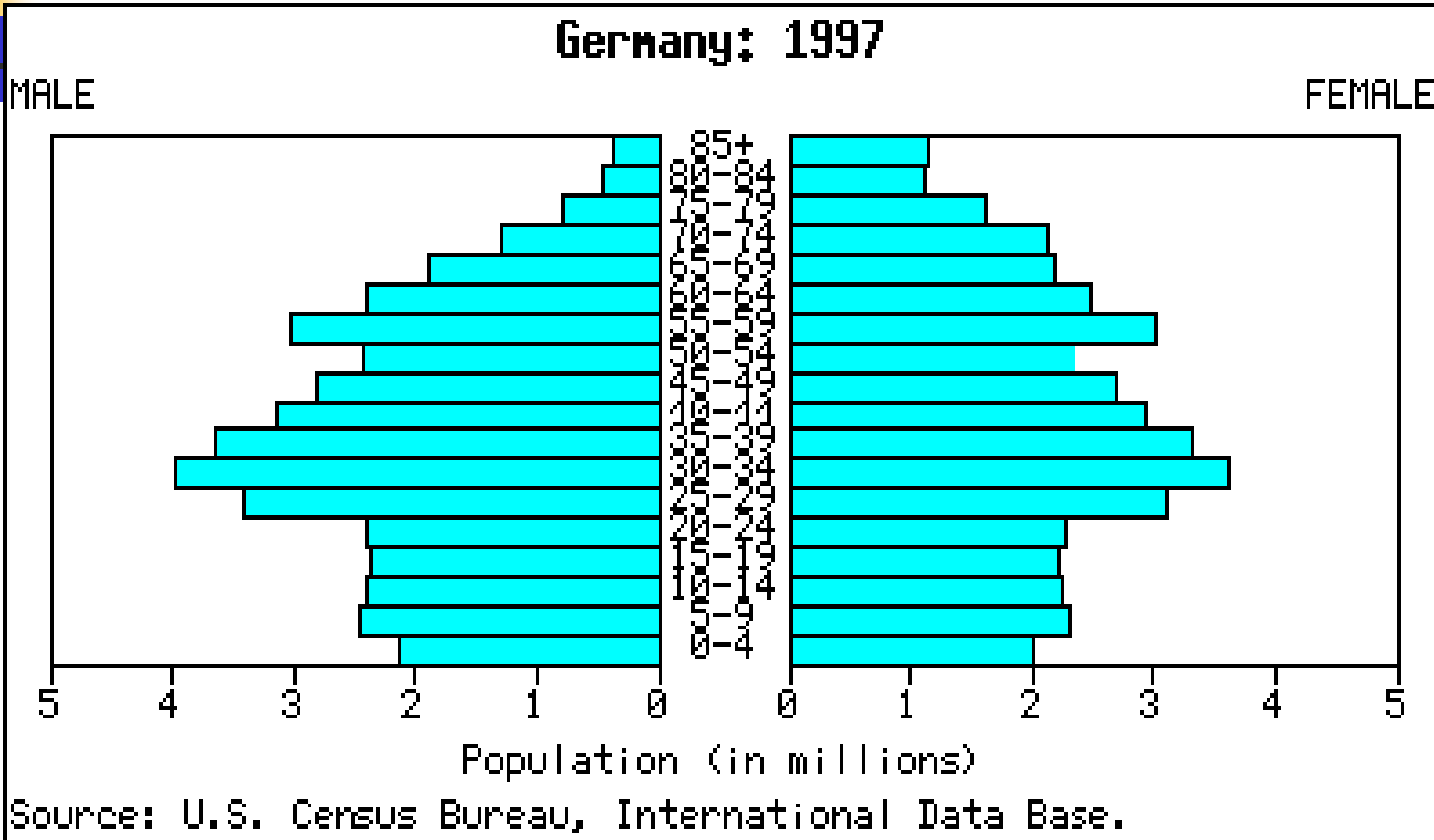


Slow Growth

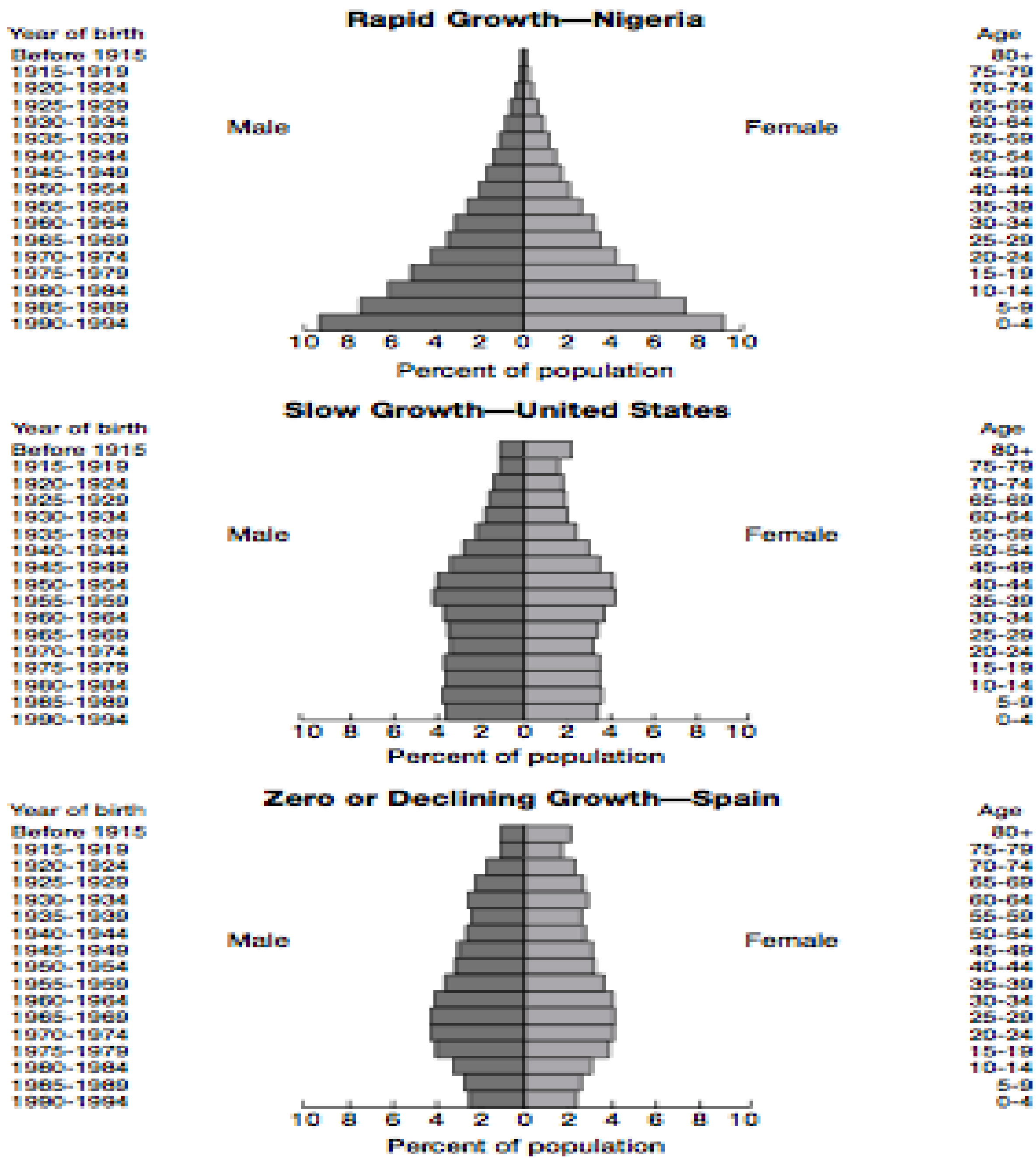


United States: 1997
MALE
FEMALE
85+
80-84
75-79
70-74
65-69
60-64
55-59
50-54
45-49
40-44
35-39
30-34
25-29
20-24
15-19
10-14
5-9
0-4
14 12 10 8 6 4 2 0
0 2 4 6 8 10 12 14
Population (in millions)
Source: U.S. Census Bureau, International Data Base.

Negative Growth

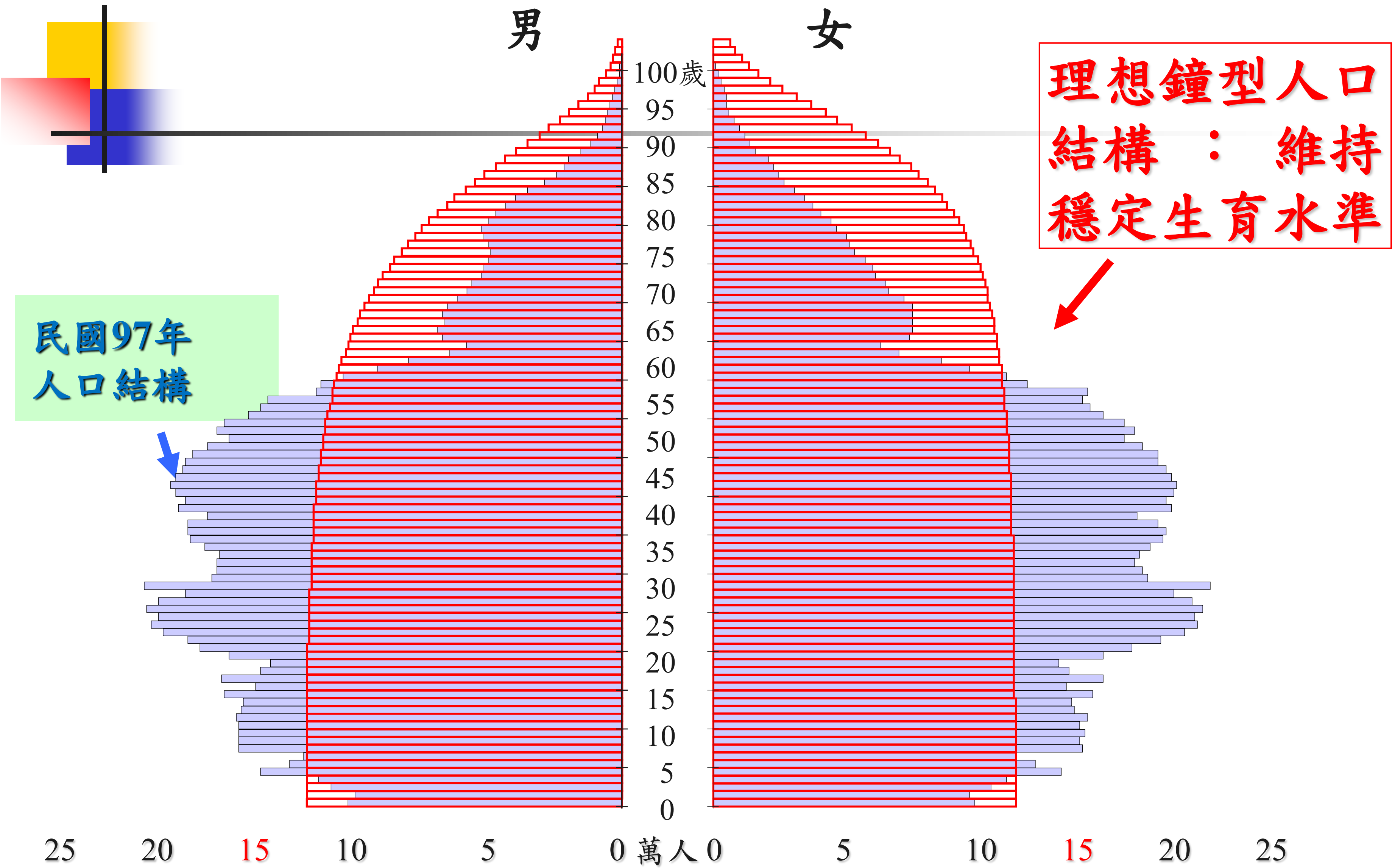


Age Patterns of Population: Nigeria, United States, and Spain, 1995



Sources: U.S. Census Bureau and the United Nations Population Division.

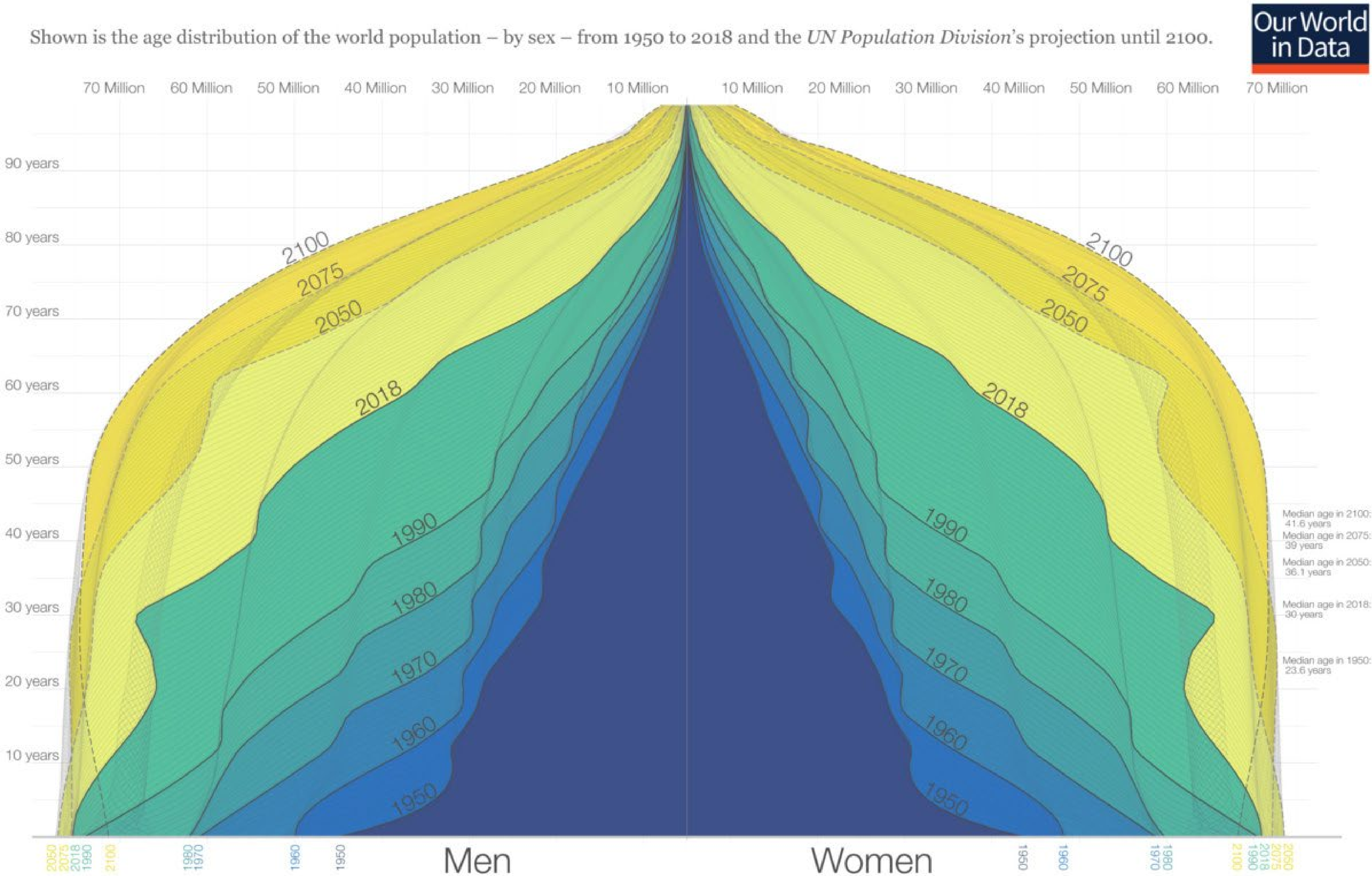
理想人口結構發展之金字塔



資料來源：行政院經建會中華民國97年至145年人口推計

壽命延長改變了人口金字塔的形狀！

Shown is the age distribution of the world population – by sex – from 1950 to 2018 and the *UN Population Division*'s projection until 2100.



Data source: United Nations Population Division – World Population Prospects 2017; Medium Variant.
The data visualization is available at OurWorldinData.org, where you find more research on how the world is changing and why.

■ 特徵方程式(Characteristic Equation) :

→仿照時間 t 時 x 歲的人數

$$F_x(t)\,dx = B(t-x)\cdot S(x)\,dx,$$

也可定義在時間 t 瞬間的出生數

$$B(t)\cdot e^{-r_i x}\cdot S(x)\cdot \varphi_x^f\,dx$$

因此，可得下列特徵方程式

$$B(t) = \int_0^\infty B(t)\cdot e^{-r_i x}\cdot S(x)\cdot \varphi_x^f\,dx.$$

或可表示成

$$\left\langle \begin{array}{l} \int_0^{\infty} e^{-r_i x} \cdot S(x) \cdot \varphi_x^f \, dx = 1 \\ \int_\alpha^{\beta} e^{-r_i x} \cdot S(x) \cdot \varphi_x^f \, dx = 1 \end{array} \right.$$

註：$b_i = \dfrac{B(t)}{P(t)}$ → 實質出生率

$d_i = \dfrac{D(t)}{P(t)}$ → 實質死亡率

範例三：證明b_i、d_i皆為時間的常數。

→根據定義

$$b_i = \frac{B(t)}{P(t)} = \frac{B(t)}{\int_0^{\infty} B(t) \cdot e^{-r_i x} \cdot S(x)dx} = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-r_i x} \cdot S(x)dx}$$

與時間無關。

同理，

$$d_i = \frac{D(t)}{P(t)} = \frac{\int_0^{\infty} B(t) \cdot e^{-r_i x} \cdot S(x)\mu_x dx}{\int_0^{\infty} B(t) \cdot e^{-r_i x} \cdot S(x)dx}$$

$$= b_i \int_0^{\infty} e^{-r_i x} \cdot S(x)\mu_x dx.$$

■範例四：證明穩定人口滿足$d_i = b_i - r_i$ 。

→因為 $\frac{d}{dx}S(x) = -S(x)\cdot\mu_x$

由上例可推得

$$d_i = b_i\int_0^\infty e^{-r_i x}\cdot S(x)\mu_x dx = -\int_0^\infty b_i \cdot e^{-r_i x} dS(x)$$

再以部分積分可算出

$$d_i = -b_i \cdot e^{-r_i x}\cdot S(x)\Big|_0^\infty - r_i\int_0^\infty b_i \cdot e^{-r_i x}\cdot S(x)dx$$

$$= b_i - r_i.$$

- 令 B^Z 為第 Z 年度的出生數，$E_x(Z)$為第 Z 年度滿 x 歲的人。

→對均衡人口而言，$E_x(Z) = B^{Z-x} \cdot S(x)$

或是 $S(x) = \dfrac{E_x(Z)}{B^{Z-x}} = \dfrac{E_x(Z)}{B^Z}$。

→ 對穩定人口而言，

$$S(x) = \frac{E_x(Z)}{B^Z \cdot e^{-r_i x}} = \frac{E_x(Z)}{B^Z} \cdot e^{+r_i x} \text{ 。}$$

- 範例五：試求 $F_x(t)=B(t)\cdot e^{-r_i x}\cdot S(x)$ 的導數。

→ $$\frac{d}{dx}F_x(t)=B(t)\left[-r_i e^{-r_i x}S(x)-S(x)\cdot\mu_x\cdot e^{-r_i x}\right]$$

$$=-B(t)e^{-r_i x}S(x)\cdot(r_i+\mu_x)$$

$$=-B(t)e^{-r_i x}\cdot e^{-\int_0^x \mu_y dy}\cdot(r_i+\mu_x).$$

註：人口老化的原因有二 — 死亡率的降低、出生率的降低。

由普查及戶籍資料求得r_i值

有幾種方法可求出值 r_i 的近似值。

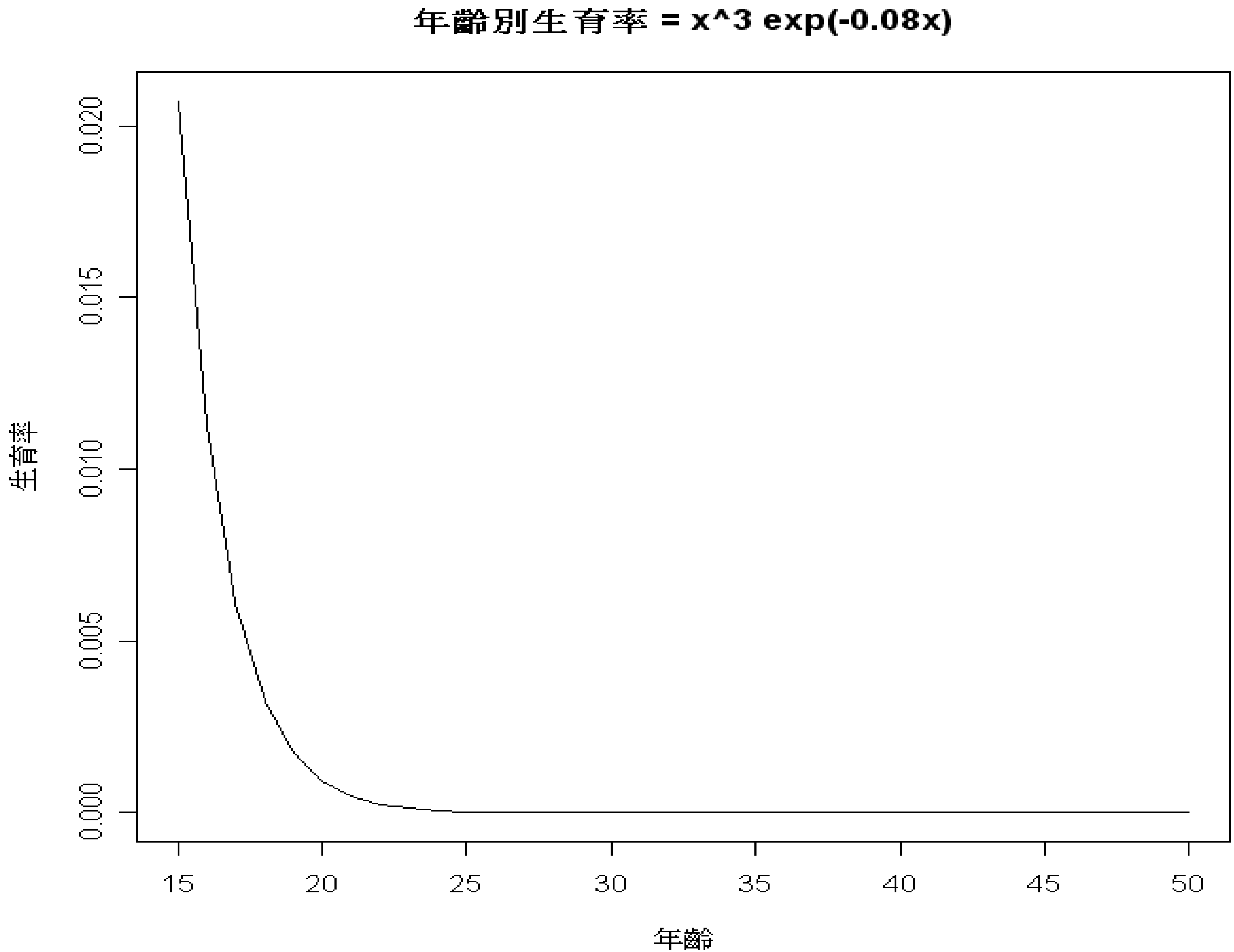
- 藉由特徵方程式及相關資訊：

→若可獲知 $\mu_x = 0.02$ 及 $\phi_x^f = x^3 e^{-0.8x},\ 0 \le x \le \infty.$

則計算以下特徵方程式

$$\int_0^\infty e^{-r_i x} \cdot S(x) \cdot \phi_x^f \, dx = 1,$$

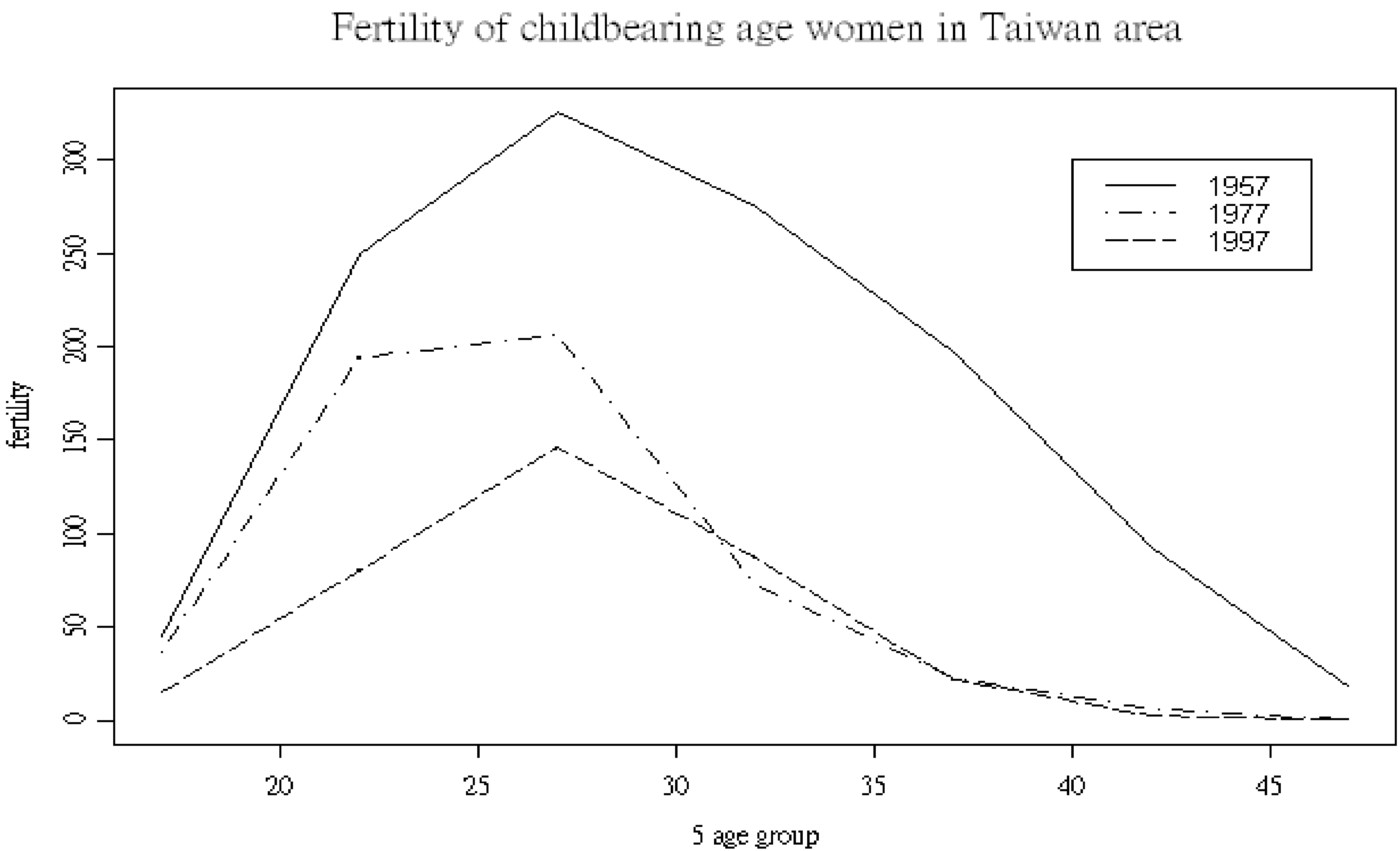
可求得 $r_i \cong 0.745.$



年齡別生育率 = x^3 exp(-0.08x)
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
生育率
15
20
25
30
35
40
45
50
年齡

生育率分佈(Gamma 分配)：

$$f_x = \Gamma^{-1}(\alpha)\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$



- 然而我們通常只能獲得整數年齡的生育率及死亡率，因此改用下式

$$\sum_{\alpha}^{\beta} e^{-r_i\xi}\cdot S(\xi)\cdot f_x^f = 1,$$

其中 $\xi\,(x<\xi<x+1)$ 為 x 歲母親的平均年齡。(通常取 $\xi = x+\frac{1}{2}$。)

→接著再對 $e^{-r_i y}$ 取泰勒展開式：

$$e^{-r_i y} \cong 1 - r_i y + \frac{r_i^2}{2} y^2 + \cdots$$

再以 $S(x)=\frac{L_x}{l_0}$ 代入，可得

$$\frac{\sum L_x f_x^f}{l_0} - r_i \frac{2\sum (x+\frac{1}{2}) L_x f_x^f}{l_0} + \frac{r_i^2}{2} \frac{\sum (x+\frac{1}{2})^2 L_x f_x^f}{l_0} \cong 1,$$

藉由解 r_i 的二次方程式求得 r_i。

- 因為NRR是一個母親一生中生育的女嬰數，也可解釋為兩代之間的婦女總數的比值(NRR>1代表人口增加)，若以T表示兩代之間的時間差距，則

$$\frac{B(t)}{B(t-T)} = e^{r_i T} = NRR \Rightarrow r_i = \frac{\ln(NRR)}{T}.$$

- 若 T 不可得，也可藉由生母平均年齡(θ)代替，生母平均年齡(θ) 可由下式計算而得：

$$\theta = \frac{\sum (x+\frac{1}{2}) \cdot L_x f_x^f}{\sum L_x f_x^f}.$$

- 再加上 $1-\frac{1}{NRR} \cong \ln(NRR)$, 求得

$$r_i \cong \frac{\ln(NRR)}{\theta - 0.7\ln(NRR)}.$$

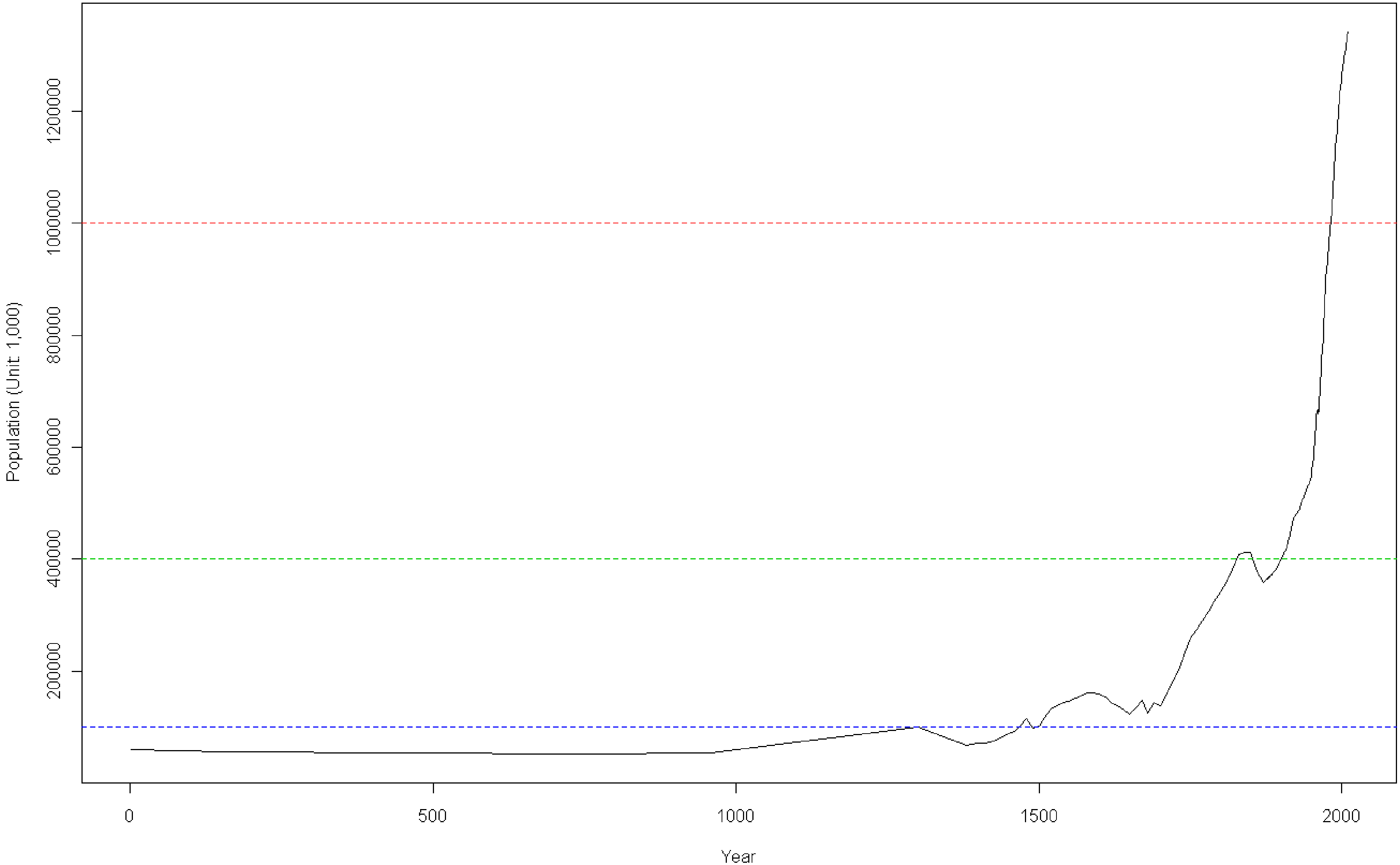
註：此與利率與資本加倍的公式類似。

→例如：NRR＝1.05、θ＝25，計算可得

$$r_i \cong \frac{\ln(NRR)}{\theta - 0.7\ln(NRR)} \cong 0.00195 \Rightarrow \exp(r_i) \cong 1.002$$

也就是500年人口才會加倍。

中國兩千年來人口趨勢



註：年成率有時不到0.1%(1000年才能加倍)

■ 範例六：比較均衡人口、穩定人口的平均年齡，若兩者有相同的死亡率。

→均衡人口：

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} x \cdot l_x \, dx}{\int_0^{\infty} l_x \, dx};$$

→穩定人口：

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} x \cdot e^{-r_i x} \cdot S(x) dx}{\int_0^{\infty} e^{-r_i x} \cdot S(x) \, dx}.$$

若假設

$$\begin{cases} S(x) = e^{-\mu x} \\ e^{-r_i x} \cong 1 - r_i x + \frac{1}{2}(r_i x)^2 \\ Q_i = \int_0^{\infty} x^i \cdot S(x) dx \end{cases}$$

■ 則可求得

$$\overline{X} \approx \frac{\int_0^\infty x(1 - r_i x + \frac{r_i^2}{2} x^2) S(x)\, dx}{\int_0^\infty (1 - r_i x + \frac{r_i^2}{2} x^2) S(x)\, dx}$$

$$= \frac{Q_1 - r_i Q_2 + \frac{r_i^2}{2} Q_3}{Q_0 - r_i Q_1 + \frac{r_i^2}{2} Q_2}$$

$$\approx \frac{Q_1}{Q_0} - r_i \left[\frac{Q_2}{Q_0} - (\frac{Q_1}{Q_0})^2 \right] = \frac{Q_1}{Q_0} - r_i \sigma^2$$

或是 $r_i \cong \frac{\frac{Q_2}{Q_1} - \overline{x}}{\sigma^2}.$

■ 應用範例一：定義 $k=\dfrac{x\text{歲以上的人數}}{x\text{歲以下的人數}}$ (可用來測量人口老化比例)，在定死力的假設下，將 x 以 k 來表示。

→ 定死力的假設下 $S(x)=e^{-\mu x}$ ，因此

$$k=\frac{\int_x^\beta e^{-r_i y}\cdot e^{-\mu y}dy}{\int_\alpha^x e^{-r_i y}\cdot e^{-\mu y}dy}=\frac{e^{-(r_i+\mu)x}-e^{-(r_i+\mu)\beta}}{e^{-(r_i+\mu)\alpha}-e^{-(r_i+\mu)x}},$$

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{r_i+\mu}\ln\left[\frac{k\cdot e^{-(r_i+\mu)\alpha}+e^{-(r_i+\mu)\beta}}{k+1}\right].$$

由 $\dfrac{dk}{dr_i}=\dfrac{dk}{d\mu}$ 可知 r_i 與 μ 對老化有相同的影響力。

■ 應用範例二：(Pension Burden)

某穩定人口的實質成長率為 r_i 且滿足定死力，試求65歲以上人口與20至64歲的人口比值(年金負擔)。

→由定義可知均衡人口的

$$PB = \frac{\int_{65}^{\infty} l_x dx}{\int_{20}^{65} l_x dx} = \frac{T_{65}}{T_{20} - T_{65}},$$

同理，穩定人口的

$$PB = \frac{\int_{65}^{\infty} e^{-r_i x} \cdot S(x) dx}{\int_{20}^{65} e^{-r_i x} \cdot S(x) dx}.$$

因為死力為定值 $\Rightarrow S(x)=e^{-\mu x}$,

$$PB=\frac{\int_{65}^{\infty} e^{-r_i x}\cdot S(x)dx}{\int_{20}^{65} e^{-r_i x}\cdot S(x)dx}=\frac{\int_{65}^{\infty} e^{-(r_i+\mu)x}dx}{\int_{20}^{65} e^{-(r_i+\mu)x}dx}$$

$$=\frac{-(\frac{1}{r_i+\mu})e^{-(r_i+\mu)x}\Big|_{65}^{\infty}}{-(\frac{1}{r_i+\mu})e^{-(r_i+\mu)x}\Big|_{20}^{65}}$$

$$=\frac{e^{-65(r_i+\mu)}}{e^{-20(r_i+\mu)}-e^{-65(r_i+\mu)}}.$$

■ 註：試以幾個數值說明上例

→ $r_i = 0.01$、$\mu = 0.015 \Rightarrow \mathrm{PB} = 0.48$；

(約每兩人負擔一個老年人)

→ $r_i = 0$、$\mu = 0.015 \Rightarrow \mathrm{PB} = 1.037$；

(人口不增加負擔加倍)

→

$$\left\langle \begin{array}{l} r_i = 0.005 = \mu \quad \Rightarrow \quad \mathrm{PB} = 1.760 \\ r_i = 0.01 = \mu \quad \Rightarrow \quad \mathrm{PB} = 0.685 \\ r_i = 0.015 = \mu \quad \Rightarrow \quad \mathrm{PB} = 0.35 \end{array} \right.$$

(「少生少死」的負擔比「多生多死」重)

- 應用範例三：若國家將付給死亡時年齡介於20歲至64歲的國民一筆死亡津貼，而這筆費用由所有20歲至64歲的國民負擔，試求負擔的數值。（註：由此可見死亡津貼較小。）

→ 均衡人口：(102年台灣地區簡易生命表，兩性)

$$\Pi = \frac{\int_{20}^{65} \ell_x \mu_x \, dx}{\int_{20}^{65} \ell_x dx} = \frac{\ell_{20} - \ell_{65}}{T_{20} - T_{65}} \approx 0.003037.$$

→ 穩定人口：

$$\Pi = \frac{\int_{20}^{65} e^{-r_i x} S(x) \mu_x \, dx}{\int_{20}^{65} e^{-r_i x} S(x) \, dx}$$